2 Измеримые функции, измеримость непрерывной функции, предела измеримых функций, производной

$\exists$ X – мн-во, Σ – некот. σ-алг. п/мн-в мн-ва X и на Σ задана σ-адд. мера μ

Φ-ция $f: X \to \mathbb{R}$ наз-ся **измеримой**, if $\forall$ числа $c \in \mathbb{R}$ мн-во $X_c = \{x \mid f(x) < c\}$ измеримо

Зам If $f(x) \in C$, то она измерима

▲ $\{f(x) < c\}$; дост. д-ть, что оно открыто. $\exists x_0 \in \{f(x) < c\}$, т.е. $f(x_0) < c$. В силу непр-ти $\Rightarrow \exists$ шар с центром в т. x_0 с дост. малым радиусом, лежащий $\in \{f(x) < c\}$ ■

$\Downarrow$ След. 4 утв-я $\sim$: 1) $\forall c$ измеримо $\{f(x) < c\}$;
2) $\forall c$ изм. $\{f(x) \le c\}$;
3) $\forall c$ изм. $\{f(x) > c\}$;
4) $\forall c$ изм. $\{f(x) \ge c\}$

▲ $\boxed{1 \Rightarrow 2}$ $\{f(x) \le c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f(x) < c + 1/n\}$ – измеримо, ибо σ-алг.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ $\{f(x) > c\} = X \setminus \{f(x) \le c\}$

$\boxed{3 \Rightarrow 4}$ $\{f(x) \ge c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f(x) > c - \frac{1}{n}\}$

$\boxed{4 \Rightarrow 1}$ $\{f(x) < c\} = X \setminus \{f(x) \ge c\}$ ■

$\Downarrow$ If $f_n(x)$ измер. и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $\forall x \in X$, то $f(x)$ – измерим. ф-ция

▲ $\{f < c\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{f_n < c - 1/k\}$

1) $\forall t \in \{f < c\}$, т.е. $f(t) < c \Rightarrow \lim f_n(t) = f(t) < c$

$f(t) < c - (1/k)$, $k \ge M \Rightarrow f_n(t) < c - (1/k)$, $n \ge N$

$t = \bigcap_{n=N}^{\infty} \{f_n < c - 1/k\} \Rightarrow t \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{f_n < c - 1/k\}$

2) $t \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{f_n < c - 1/k\} \Rightarrow \exists k, m: t \in \bigcap_{n=m}^{\infty} \{f_n < c - 1/k\} \Rightarrow t \in \{f_n < c - 1/k\}$ $\forall n \ge M$ при $n \to \infty$ $f_n(t) < c - 1/k$

$f(t) \le c - 1/k \Rightarrow f(t) < c \Rightarrow t \in \{f < c\}$

$\{f_n < c - 1/k\}$ измеримо ■

$\Downarrow$ If $f(x)$ измер. и имеет произв. почти всюду, то $f'(x)$ измерим. ф-ция, т.е. $\exists$ g/ почти всюду, $\forall x \in X$ $\lim\limits_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta} = f'(x)$

▲ $\varphi_n(x) = \dfrac{f(x+1/n) - f(x)}{(1/n)}$ – измерима $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f'(x)$ – измер. ф-ция ■